

Partiel, 27.02.26
(Q.Gazda & S.Alloun)

*Toutes les réponses doivent être justifiées. Passer du temps sur la bonne rédaction d'un argument est préférable à vouloir répondre à toutes les questions. Vous pouvez utiliser les résultats des questions précédentes même si vous ne les avez pas traitées.
Le barème est a priori de 50 points.*

EXERCICE 1. (30 POINTS)

Soit K un corps de nombres de degré n . Notez $\Delta_K \in \mathbb{Z}$ le discriminant de K .

(1) Soit $P(X) := X^3 - aX + b$, où $a, b \in \mathbb{Z}$, un polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$.

(1,a) Montrez que P a au moins une racine réelle α .

Jusqu'à (1,f) supposez que $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.

(1,b) Montrez que $\text{disc}(1, \alpha, \alpha^2) = 4a^3 - 27b^2$.

(1,c) Montrez que Δ_K est de même signe que $\text{disc}(1, \alpha, \alpha^2)$.

(1,d) Montrez que si $a = 1$ et $b = -1$ alors P est bien irréductible et que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$.

Supposez en plus que K est galoisien, c'est-à-dire que $\sigma(K) = K$ pour tout plongement $\sigma : K \rightarrow \mathbb{C}$.

(1,e) Montrez que les trois racines de P sont réelles.

(1,f) Montrez que $\Delta_K > 0$.

(2) Supposez maintenant que K est de degré n impair et galoisien.

(2,a) À partir du cours, donnez une façon de calculer Δ_K pour montrer qu'il existe $x \in K$ tel que $\Delta_K = x^2$.

(2,b) Montrez que $x \in \mathbb{Z}$. (Indication : Considérez le corps $\mathbb{Q}(x) \subset K$)

EXERCICE 2. NOMBRES DE PISOT-VIJAYARAGHAVAN. (15 POINTS)

Soient $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire irréductible et $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d$ ses racines ; notez $\theta := \theta_1$. On dit que θ est un nombre de Pisot-Vijayaraghavan si $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta > 1$ et si pour tout $i \in \{2, \dots, d\}$, $|\theta_i| < 1$.

(1) Soient θ un nombre de Pisot-Vijayaraghavan et $K := \mathbb{Q}(\theta)$.

(1,a) Exprimez $\text{Tr}_{K|\mathbb{Q}}(\theta^n)$ en fonction de θ et de $\theta_2, \dots, \theta_d$.

(1,b) Montrez qu'il existe une suite d'entiers $(t_n)_{n \geq 1}$ telle que

$$\theta^n - t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(2) Soit $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or. Notez $K := \mathbb{Q}(\varphi)$.

(2,a) Montrez que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\varphi]$ et que φ est un nombre de Pisot-Vijayaraghavan.

(2,b) Déduisez-en que la suite $(F_n)_{n \geq 0}$ définie par $F_0 = 2$, $F_1 = 1$ et la relation $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ vérifie $F_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \varphi^n$.

(3) Revenez à la question (1,d) de l'EXERCICE 1. Montrez que le polynôme $X^3 - X - 1$ possède une seule racine réelle et que cette racine est un nombre de Pisot-Vijayaraghavan.

On l'appelle **nombre plastique** et Carl Siegel a démontré que c'est le plus petit nombre de Pisot-Vijayaraghavan. Le nombre plastique vaut exactement

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18}}$$

PROBLÈME : L'APPROXIMATION DES RACINES CARRÉES. (15 POINTS)

Un des plus anciens problèmes mathématiques est celui de l'approximation des racines carrés par des rationnels.

Soit $d > 1$ un entier sans facteur carré. Dans la suite $K := \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \subset \mathbb{R}$.

(1) Soient $x, y \in \mathbb{Q}$. Calculez $N_{K|\mathbb{Q}}(x + y\sqrt{d})$.

(2) Soit $u := x + y\sqrt{d} \in \mathcal{O}_K$ où $x, y \in \mathbb{Z}$ et $N_{K|\mathbb{Q}}(u) = \pm 1$.

Notez $u^n = x_n + y_n\sqrt{d}$, où $x_n, y_n \in \mathbb{Q}$.

(2,a) Démontrez que pour tout n ,

$$x_n, y_n \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad x_n \wedge y_n = 1$$

(2,b) Montrez que si $|y_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ alors

$$\frac{|x_n|}{|y_n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{d}$$

(3) Donnez une bonne approximation de $\sqrt{2}$ par une fraction irréductible a/b .

(4) À votre avis, dites comment le mathématicien Brahmagupta (598-670) faisait pour trouver une suite d'approximations de $\sqrt{61}$ à partir de l'égalité

$$9 \cdot 169 - 61 \cdot 25 = -4$$

La meilleure approximation qu'il avait trouvée donnait

$$\sqrt{61} \simeq \frac{1766319049}{226153980}$$